Movement of Hot Spots of the Solutions for the Heat Equation with a Potential(Potential Theory and its Related Fields)

AUTHOR(S):

石毛, 和弘

数理解析研究所講究録
第 1553 巻 2007 年 17-32

Movement of Hot Spots of the Solutions for the Heat Equation with a Potential

東北大学・大学院理学研究科　石毛和弘 (Kazuhiro Ishige)
Mathematical Institute, Tohoku University

1 Introduction

$\mathbf{R}^N$ 上の領域 Ω における熱方程式及び potential 項付き熱方程式の解 $u = u(x,t)$ の時刻 t における最大点集合 (Hot Spots)

$$H(t) = \left\{ x \in \overline{\Omega} : u(x,t) = \max_{y \in \overline{\Omega}} u(y,t) \right\}$$

を考える. 本論文では, 時間が十分経った後の最大点集合の挙動について考察していく. 解の最大点挙動を考察する動機としては,

(i) 一般に, 関数の最大点 (最小点) の位置, 個数やその値は関数の形状に関する基本的な情報を与えることから, 熱方程式の解の形状について調べるという観点から重要である;

(ii) 線形方程式の解の形状に関する情報は, 様々な非線形方程式の解の形状を考察する上の基本的な情報を与えると考えられる;

(iii) 領域が有界な場合, 最大点集合の挙動は固有関数の最大点の位置などと密接な関係があり, 数学的に深い内容と発展性を持っている可能性がある;

(iv) 領域が非有界な場合は, 熱方程式の Green 関数を用いて解析するなどの古典的手法では解の最大点挙動を調べるといった解の詳しい挙動を調べるには不十分であり, どういう視点で捉えて行くべきか明確なものがない. よって, どのようにして解析すべきか考察するのは興味深いと考えられる.

本論文としては, 領域が非有界な場合 ((iv) の場合) を中心に考えていくが, その解析は困難であるために, 全空間, 半空間, 球の外部領域などの限られた領域しか扱えないというのが現状だが, 現状を整理する意味を込めてそれらの結果とその解析手法について紹介していきたいと思う. 具体的な最大点挙動の問題としては,

(a) どのような条件の下, 最大点集合は空でないのか？

(b) 時間無限大における $H(t)$ の収束点, または, 無限遠点に発散するならば, その発散する方向, 発散する速さ

(c) $H(t)$ の個数

等が考えられる. また, これらの研究の過程において

(d) 臨界点の挙動 (最大点は臨界点の一つであるから, 解析して行く過程で, 何かしらの臨界点に関する情報も得ることになる);

(e) 解の微分の減衰の速さ (解の微分の振舞いは, 最大点挙動の研究に必要不可欠であることから, 結果として, 詳しい解の微分係数の挙動について考察する必要がある);

(f) 等高面の形状 (凸性など).

等の問題が考えられるが, これらは今後の研究の進展によるところが大きく, 今後の課題と言える.

本論文では, 球の外部領域において, Dirichlet 条件や Neumann 条件の下での熱方程式 $u_t = \Delta u$ の解の最大点挙動について, 問題 (a), (b), (c) について考察する. さらに, それらの応用として, potential 項がついた線形熱方程式 $u_t = \Delta u - V(|x|)u$ の解の最大点挙動や問題 (e) について扱っていく. この節の最後として, 領域が有界な場合と非有界な場合との相違点について明確にするために, 領域が有界な場合の既存の結果について紹介しておく.

有界領域と非有界領域の違いについて

熱方程式の解の最大点を調べる際, 有界領域と非有界領域を扱うのは大きくことなる. 実際, 次の熱方程式に対する初期値・境界値問題を考察してみる.

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ \partial_\nu u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{in} \quad \Omega. \end{cases}$$

ただし, Ω は滑らかな境界をもつ有界領域, ν を Ω に対する外向き単位法線ベクトル, $\partial_\nu = \partial/\partial\nu$, $\phi \in C(\overline{\Omega})$ とする. このとき, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots)$ を固有値問題

$$-\Delta\varphi = \lambda_k\varphi \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad \partial_\nu\varphi = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega$$

の固有値とし, P_k を $L^2(\Omega)$ における λ_k に対する固有空間への直交射影とする. 特に

$$\lambda_1 = 0, \qquad P_1 f = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)dx$$

に注意する．ただし，$|\Omega|$ は領域 Ω の面積とする．このとき，解の Fourier 級数展開より，$L^2(\Omega)$ において

$$u(x,t) = P_1\phi + e^{-\lambda_2 t}(P_2\phi)(x) + O(e^{-\lambda_3 t}) \quad \text{as} \quad t \to \infty \tag{1.1}$$

が成立する (解の正則定理を用いることにより，収束ノルムは $C^2(\overline{\Omega})$ をとることが可能)．ここで，相異なる固有値に対する固有関数の直交性より

$$\int_\Omega P_2\phi \, dx = 0.$$

よって，$P_2\phi \not\equiv 0$ in Ω を仮定すると

$$\mathcal{M}(P_2\phi) \equiv \left\{ x \in \overline{\Omega} \, : \, (P_2\phi)(x) = \max_{x\in\overline{\Omega}} (P_2\phi)(y) \right\} \neq \Omega.$$

さらに，(1.1) より，

$$\lim_{t\to\infty} \sup \{ |x-y| \, : \, x \in H(t), \, y \in \mathcal{M}(P_2\phi) \} = 0.$$

よって，"ほとんどの" の初期値に対して，解の最大点集合の挙動は第二 Neumann 固有関数の形状によって決定される．例えば，$\Omega = (0,1)$ の場合，第二 Neumann 固有関数は $\cos \pi x$ となるので，"ほとんどの" の初期値に対して $H(t)$ は境界に近づいていくことがわかる．この考察は 1975 年に Rauch [13] によってなされ Rauch observation と呼ばれている．その後，Ω が凸の場合，その第二 Neumann 固有関数の最大点 (最小点) は境界にのみ存在するという "hot spots conjecture" が Kawohl [12] によって提唱された．具体的に固有関数が表示できる場合を除いて，この予想の解析は困難であり，軸対称性をもつ細長い 2 次元凸領域や平面上の鋭角三角形等について考察が為されているのみである ([1], [10] 等を参照)．ただし，Ω が凸でない場合には，第二 Neumann 固有関数の最大値を内点において達成する例があることも知られている ([2] を参照)．なお，Neumann 境界条件の代わりに，Dirichlet 境界条件を仮定した場合には，解の最大点は Dirichlet 第一固有関数の最大点に近づく．

残念ながら，非有界領域においては，固有関数に対応する解の挙動を決定する指標となるべきものがない．また，基本解等を用いて具体的に解を表示して解の最大点挙動を研究する方法では，球の外部領域という最も単純な非有界領域に対しても不十分であり困難である．といって，他の有効な解析手法が何であるか不明であり，多くの課題が残されている．以下の節における考察がこれらのヒントを与えることになれば良いと思う．

2 全空間, 半空間における $H(t)$ の挙動

まず, 全空間における熱方程式の初期値問題

$$u_t = \Delta u \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^N \times (0,\infty), \qquad u(x,0) = \phi(x) \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^N$$

を考える. ただし, [3] に従い,

$$\phi \in C_0(\mathbf{R}^N), \qquad \phi \geq 0, \not\equiv 0 \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^N$$

とする. 全空間における熱方程式の解の最大点挙動は, Chavel & Karp (1990) によって初めて考察された ([3] を参照). これらの解析には, 熱方程式の基本解を用いた解の具体的表現が有効であり, 結果として次を得ることができる: ある $T > 0$ と曲線 $x = x(t) \in C^\infty([T,\infty) : \mathbf{R}^N)$ が存在して

$$H(t) = \{x(t)\}, \quad t \geq T, \qquad \lim_{t\to\infty} x(t) = \int_{\mathbf{R}^N} y\phi dy \Big/ \int_{\mathbf{R}^N} \phi dy.$$

さらに, 領域に関する折り返し (moving plane method) と比較原理を用いる方法により, すべての t に対して, $H(t)$ は初期値関数 ϕ の support の凸閉に含まれることもわかる

次に, 領域が半空間 $\mathbf{R}^N_+ = \{x_N > 0\}$ の場合について考えてみる. 半空間の場合については, 神保 & 坂口 (1994) ([11] を参照) について初めて考察されたが, ここでは, Neumann 境界条件の下で考察してみる. u を $\mathbf{R}^N_+$ における熱方程式の解とし,

$$u_{x_N} = 0 \text{ on } \{x_N = 0\} \times (0,\infty), \quad \phi \in C_0(\mathbf{R}^N_+), \quad \phi \geq 0, \not\equiv 0 \text{ in } \mathbf{R}^N_+$$

とする. このとき, $u(x', x_N, t) = u(x', -x_N, t)$ とすることによって, u は全空間における熱方程式の解となる. よって, 十分時間が経過すると, $H(t)$ は一点になり, u の対称性から, ある $T > 0$ と曲線 $x = x(t) \in C^\infty([T,\infty) : \mathbf{R}^N_+)$ が存在して $H(t) = \{x(t)\}$, $t \geq T$ かつ

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \int_{\mathbf{R}^N_+} y_i\phi dy \Big/ \int_{\mathbf{R}^N_+} \phi dy \quad (i = 1,\ldots,N-1), \qquad x_N(t) = 0$$

が成立する.

Remark 2.1 *Dirichet* 条件, *Robin* 条件の場合も, 解の具体的な表示により, $H(t)$ の挙動を調べることができ, $t^{1/2}$ の早さで無限に発散していく. これらについても [11] を参照されたい.

3 球の外部領域における $H(t)$ の挙動

次に, 球の外部領域における熱方程式に対する初期値・境界値問題

$$
\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ \partial_\nu u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.1}
$$

及び

$$
\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{3.2}
$$

の解の最大点挙動について考察する. ただし, $\Omega = \{|x| > 1\}$ とし,

$$
\phi \in C_0(\mathbf{R}^N), \qquad \int_{\mathbf{R}^N} \phi\, dx > 0 \tag{3.3}
$$

を仮定する. これらの場合は, 神保・坂口 [11] によって初めて考察されたが, 基本解による具体的表示による解析手法はこの単純な外部領域でさえも有効ではなく, 彼らは初期値に球対称を仮定し解析を行った. これにより, Neumann 条件の場合には, ある $T > 0$ が存在し

$$
H(t) \subset \partial\Omega = \{|x| = 1\}, \qquad t \geq T. \tag{3.4}
$$

この結果は "hot spots conjecture" ではないが, Neumann 条件下では $H(t)$ は時間の経過とともに境界に近づくという結果を推測させるものになっているが, 後に述べるように一般的には正しくない. また, Dirichlet 条件の場合には, $N = 3$ の場合のみ, ある $T > 0$ とある $r = r(t) \in C^\infty([T,\infty) : (0,\infty))$ が存在し,

$$
H(t) = \{|x| = r(t)\}, \quad t \geq T, \qquad \lim_{t\to\infty} (2t)^{-1/2} r(t) = 1
$$

が成立することが示された. ここで, 「初期値の球対称性を仮定しない場合, どうなるのか」という疑問が湧く. この問題に対して, 2005 年に石毛 [5], [6] によって次の結果が得られている. 以下の結果は $\phi \in C_0(\Omega)$ という仮定を $\phi \in L^2(\Omega, e^{|x|^2/4}dx)$ に一般化しても成立する.

Neumann 条件の場合

領域が $\Omega = \mathbf{R}^N$ の場合は, 解の重心

$$
C(t) = \int_\Omega y u(y,t) dx \bigg/ \int_\Omega u(y,t) dy
$$

が保存量となり, $C(t)=C(0)$ と最大点の極限は一致した. しかし, Neumann 条件の下では, $C(t)$ は保存量ではない. しかしながら, [5] に従って, (3.1) の解 u に対して

$$C_N(t)=\int_\Omega y\left(1+\frac{|y|^{-N}}{N-1}\right)u(y,t)\,dy\Big/\int_\Omega u(y,t)\,dy$$

を導入すると,

$$C_N(t)=C_N(0),\qquad \lim_{t\to\infty}C(t)=C_N(0)$$

が成立する. つまり, $C_N(t)$ は保存量であり, 解の重心の極限となっている. この $C_N(t)$ を利用して, 解の最大点挙動の極限を考察することとする.

まず, (3.4) の拡張に相当する結果を与える.

Theorem 3.1 ([5] を参照)
u を (3.1) の解とし, (3.3) を仮定する. このとき, 任意の $t>0$ に対して, $H(t)\neq\emptyset$. さらに, $C_N(0)\in B(0,1)$ ならば, ある $T>0$ が存在し

$$H(t)\subset\partial\Omega=\{|x|=1\},\qquad t\geq T.$$

ここで, 球対称解は Theorem 3.1 の仮定をみたすことから, Theorem 3.1 は, 神保・坂口 [11] による結果 (3.4) の拡張となっていることに注意する.

次に, 一般的には (3.4) は成立しないことを示す定理を与える.

Theorem 3.2 ([5] を参照)
Theorem 3.1 と同じ仮定をする. さらに $C_N(0)\neq 0$ と仮定する. このとき,

$$x_*=C_N(0)\quad \textit{if}\quad C_N(0)\in\Omega,\qquad x_*=\frac{C_N(0)}{|C_N(0)|}\quad \textit{if}\quad C_N(0)\notin\Omega$$

とおくと,

$$\lim_{t\to\infty}\sup\{|x-x_*|\,:\,x\in H(t)\}=0$$

が成立する.

ここで, x_* は $C_N(0)$ に最も近い $\overline{\Omega}$ 上の点と言える. よって, 仮定 (3.3) の下, 時間が経過するにつれて解の最大点は解の重心の極限に最も近い点に近づいて行くということがわかる. また, $H(t)$ の個数については, Theorem 3.2 の仮定の下では, 十分時間が経過した後には一つになると予想しているが, 未解決のままである.

Dirichlet 条件の場合

Dirichlet 条件の場合は, 解の重心だけでなく, 解の volume も保存量ではないので, 対応する新しい保存量を導入する. [6] に従って, (3.2) の解 u に対して次の量を導入する.

$$V_D(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \left(1 - \frac{1}{|x|^{N-2}}\right) u(y,t)\, dy & \text{if} \quad N \geq 3, \\ \displaystyle\int_\Omega u(y,t) \log |x| \; dy & \text{if} \quad N = 2, \end{cases}$$

$$C_D(t) = \int_\Omega y u(y,t) \left(1 - \frac{1}{|x|^N}\right) dy \Big/ V_D(t)$$

これらは, それぞれ保存量となっている. まず, 解の漸近挙動に関する結果を紹介する.

Theorem 3.3 ([6] を参照)
u を (3.2) の解とし, $V_D(0) > 0$ を仮定する. このとき, $N \geq 3$ ならば,

$$\lim_{t\to\infty} \int_\Omega u(x,t)dx = V_D(0),$$
$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{N}{2}} u(x,t) = (4\pi)^{\frac{N}{2}} V_D(0) \left(1 - \frac{1}{|x|^N}\right)$$

(収束は広義一様). また, $N = 2$ ならば

$$\lim_{t\to\infty} (\log t) \int_\Omega u(x,t)dx = 2V_D(0),$$
$$\lim_{t\to\infty} t(\log t)^2 u(x,t) = \pi^{-1} V_D(0) \log |x|$$

が成立する (収束は広義一様).

この定理より, $N = 2$ と $N \geq 3$ の場合では, 解の挙動が異なっていることがわかる. また, 解の極限の形より, $H(t)$ は $t \to \infty$ に対して, 無限遠点に向かって逃げていくことがわかる. よって, 次の $H(t)$ の逃げる速さ及び逃げる方向に関する結果を与える.

Theorem 3.4 ([6] を参照)
Theorem 3.3 と同じ仮定をする. このとき, 任意の $t > 0$ に対して, $H(t) \neq \emptyset$ であり,

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x \in H(t)} \left\{\zeta(t)^{-1} |x|^N - 1\right\} = 0$$

が成立する．ただし，$N \geq 3$ 場合 $\zeta(t) = 2(N-2)t$, $N = 2$ の場合 $\zeta(t) = 2t(\log t)^{-1}$ とする．さらに，$C_D(0) \neq 0$ を仮定すると，ある $T > 0$ と曲線 $x = x(t) \in C^\infty([T,\infty) : \overline{\Omega})$ が存在し，

$$H(t) = \{x(t)\}, \qquad t \geq T, \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{|x(t)|} = \frac{C_D(0)}{|C_D(0)|}.$$

これにより，時間が十分経ったときの $H(t)$ の挙動について，その発散速度，方向，個数についてわかったことになる．

4 $H(t)$ の挙動の解析手法について

熱方程式の解の挙動を調べるには様々な手法があるが，ここでは自己相似変換に基づいた変換を行って解の漸近挙動を調べていく．これらを通して，解析の困難点と論文 [5] の改善点も明らかになると思われる．特にここでは，Neumann 境界条件の場合のみ扱うことにし，最大点挙動を調べるのに足る解の漸近挙動を調べるアイデアを説明していく．これが，最大点挙動を解析する上で最も困難な点であると考えるからである．また，ある程度の解の漸近挙動を調べることができるならば，その後は，解の形状によって解析するべき点は異なり，Neumann 境界条件の場合と Dirichlet 境界条件の場合では解析する点が異なるが，ここでは煩雑になるので省略する．

球の外部領域において，Neumann 境界条件下における熱方程式の解 u の漸近挙動を調べることにし，

$$v(y,s) = (1+t)^{\frac{N}{2}} u(x,t), \quad y = (1+t)^{-\frac{1}{2}} x, \quad s = \log(1+t)$$

とおくと，

$$\begin{cases} \partial_s v = \dfrac{1}{\rho}\mathrm{div}\,(\rho \nabla_y v) + \dfrac{N}{2} v & \text{in} \quad \bigcup_{s>0}(\Omega(s) \times \{s\}), \\ \partial_\nu v = 0 & \text{on} \quad \bigcup_{s>0}(\partial\Omega(s) \times \{s\}), \\ v(y,0) = \phi(y) & \text{in} \quad \Omega \end{cases}$$

をみたす．ただし，$\rho(y) = e^{\frac{|y|^2}{4}}$, $\Omega(s) = \{|y| > e^{-s/2}\}$ とする．また，この重み ρ を利用して，固有値問題

$$-\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\,(\rho \nabla_y \varphi) = \lambda \varphi \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^N, \qquad \varphi \in H^1(\mathbf{R}^N, \rho dy).$$

を考えることができ，その固有関数は $e^{-\frac{|y|^2}{4}}$ の空間微分によって与えられ，その固有値は $(N+i)/2$ $(i = 0,1,2,\ldots)$ と与えることができる（[4] を参照）．こ

をみたしている. この $v_{k,i}$ について変数変換を行い,

$$w_{k,i}(y,s) = (1+t)^{\frac{N+k}{2}} v_{k,i}(x,t), \quad y = (1+t)^{-\frac{1}{2}} x, \quad s = \log(1+t)$$

とし, この $w_{k,i}$ に対して $L^2(\Omega(s), \rho dy)$ における固有関数展開を行って解の漸近挙動を調べる. この解析を通して, $\|w_{k,i}(s)\|_{L^2(\Omega(s),\rho dy)}$ の有界性がわかり,

$$\|v_{k,i}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq {}^{\exists}Ct^{-\frac{N}{4}-\frac{k}{2}} \|\phi\|_{L^2(\Omega,\rho dx)}, \quad t > 0$$

がわかる. さらに, $0 < \epsilon < L$ に対して,

$$\lim_{s\to\infty} w_{k,i}(y,s) = {}^{\exists}c|y|^k e^{-\frac{|y|^2}{4}} \tag{4.1}$$

が成立する (ただし, この収束は $\epsilon \leq |y| \leq L$ をみたす y に対して一様).

ここから, $v_{k,i}$ の球対称性を用いていく. U_k を常微分方程式

$$U'' + \frac{N-1}{r}U' - \frac{\omega_k}{r^2}U = 0 \quad \text{in} \quad (1,\infty), \quad U(1) = 1, \quad U'(1) = 0$$

の解とする. このとき, ある正定数 a が存在し, 十分大きい r に対して $U_k(r) = ar^k(1+o(1))$ が成立する. また, $[1,\infty)$ 上の連続関数 f に対する

$$U'' + \frac{N-1}{r}U' - \frac{\omega_k}{r^2}U = f \quad \text{in} \quad (1,\infty), \quad U(1) = U'(1) = 0$$

の解を $F_k[f]$ とする. このとき, 常微分方程式の解の一意性定理より,

$$F_k[f](r) = r^k \int_1^r s^{1-N-2k} \left(\int_1^s \tau^{N+k-1} f(\tau) \right) ds$$

が成立する. また, $v_{k,i}$ は任意の $t > 0$ に対して

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} v_{k,i} + \frac{\partial}{\partial r} v_{k,i} - \frac{\omega_k}{r^2} v_{k,i} = \partial_t v_{k,i} \qquad r = |x| \in (1,\infty)$$

をみたしているので, 常微分方程式の解の一意性定理より

$$v_{k,i}(x,t) = {}^{\exists}\zeta_{k,i}(t) U_k(|x|) + F_k[(\partial_t v_{k,i})(t)](|x|), \quad x \in \Omega \tag{4.2}$$

と書くことができる. ここで, (4.1), (4.2) を用いることによって, $|x| = (1+t)^{1/2}$ となる $x \in \Omega$ と十分大きな t に対して,

$$v_{k,i}(x,t) = {}^{\exists}c'(1+t)^{-\frac{N+k}{2}}(1+o(1)) = \zeta_{k,i}(t) U_k((1+t)^{1/2})(1+o(1)).$$

れにより, $\Omega = \mathbf{R}^N$ の場合であれば, あたかも有界領域の場合であるかのように Fourier 級数展開ができ, $L^2(\mathbf{R}^N, \rho dy)$ における解の挙動を調べることができ, さらに解の正則性定理を用いることにより, $C^2(K)$ (K は任意の有界閉集合) における解の挙動を調べることができる.

今, $\Omega = \{|x| > 1\}$ であるから, $\mathbf{R}^N$ の場合の議論がそのままで行くわけではないが, s が十分大きければ, $\Omega(s)$ における固有値問題の解は全空間の場合で近似できることは予想でき, 実際, うまくいく. よって, Fourier 級数展開もどきが可能であり, $L^2(\Omega(s), \rho dy)$ における解の漸近挙動を解析できる. 後は, v に解の正則性定理を用いると, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, 領域 $\{\epsilon < |y| < \epsilon^{-1}\}$ において v の漸近挙動が C^2 ノルムで調べることが可能となる.

しかし, ここから本質的な困難さが現れる. $\partial\Omega(s)$ の曲率は $s \to \infty$ につれて無限大に発散するために, 領域 $\{|y| < \epsilon\}$ において, 解の正則性定理を用いることができず, 収束ノルムを L^2 から連続ノルムにさえ改善できない. また, 変数を元に戻して, 解の正則性定理を適応し収束ノルムの改善を試みることも考えられるが, これらを行うには, 熱方程式の解の微分減衰に関する不等式

$$\|(\nabla_x^j u)(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le {}^\exists C t^{-\frac{N+|j|}{2}} \|\phi\|_{L^1(\Omega)}, \quad t \gg 1,\ |j| = 1, 2, 3$$

が必要であるが, この不等式が成立するかどうかが問題になる (第6節を参照). また, この収束ノルムの改善が単純に可能であるとすると, 解の漸近挙動は境界条件に依存しないという結論が導かれてしまうので, 解の挙動が境界条件に依存することに矛盾する. 結果として, どのようにして境界 $\partial\Omega$ の近くにおける解の漸近挙動を調べるのか？という問題が残こる.

これらの問題点を解消するために, Ω の球対称性を用いる. まず, $\{\omega_k\}_{k=0}^\infty$ を $\Delta_{\mathbf{S}^{N-1}}$ の固有値, つまり $\omega_k = k(N+k-2)$ とし, ω_k に対応する固有空間の次元を l_k, 固有関数を $Q_{k,i}(x/|x|)$ $(i = 1, \ldots, l_k)$ と書くことにする. これらを用いて, 初期値を球対称関数と球面調和関数の積の和として, 以下のように表現しておく:

$$\phi = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{l_k} \phi_{k,i}(|x|) Q_{k,i}\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad \text{in} \quad L^2(\Omega, \rho dy).$$

さらに, $u_{k,i}$ を初期値 $\phi_{k,i}(|x|)Q_{k,i}(x/|x|)$ に対応する熱方程式の解とし, $v_{k,i}$ を

$$\begin{cases} \partial_t v = \Delta v - \dfrac{\omega_k}{|x|^2} v & \text{in} \quad \Omega \times (0, \infty), \\ \partial_\nu v = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0, \infty), \\ v(x, 0) = \phi_{k,i}(|x|) & \text{in} \quad \mathbf{R}^N \end{cases}$$

の解とする. このとき, $v_{k,i}$ は球対称関数であり,

$$u_{k,i}(x, t) = v_{k,i}(x, t) Q_{k,i}\left(\frac{x}{|x|}\right) \qquad \text{in} \quad \mathbf{R}^N \times (0, \infty)$$

これにより, 十分大きな t に対して

(4.3) $\zeta_{k,i}(t) = c' t^{-\frac{N+k}{2}} [U_k((1+t)^{1/2})]^{-1}(1+o(1)) = {}^{\exists}c'' t^{-\frac{N}{2}-k}(1+o(1))$

が得られる. したがって, 必要ならば (4.2) の両辺を微分することにより, (4.3) を用いて $v_{k,i}$ の微分を含めた挙動を調べることが可能になる. また, $k=0$ の場合は, $U_0 \equiv 1$ というとても単純な関数が現れ過ぎて, あまり解の形状に情報を与えないが, $\partial_t v_{k,i}$ に同様の解析を行い, それを (4.2) に代入することによって詳しい解挙動を調べることが可能になる. これらを通して, u の微分の挙動を調べることが可能になり, 結果的に $H(t)$ の挙動を調べることが可能になる.

5 Potential 項付き熱方程式の場合について

最近, 大阪府立大の壁谷善継氏と共に, potential 項と解の最大点挙動の関係を調べるため, 次の potential 項付き熱方程式

$$\text{(5.1)} \qquad \begin{cases} \partial_t u = \Delta u - V(|x|)u & \text{in} \quad \mathbf{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{in} \quad \mathbf{R}^N \end{cases}$$

の解の最大点挙動について研究を行った. ただし, $\phi \in L^2(\mathbf{R}^N, e^{|x|^2/4}dx)$ とする. 論文 [5], [6] においては明確な認識をしていなかったが, 論文 [7], [8], [9] において熱方程式に低階項として potential 項を加えたことによって, 解の最大点挙動と方程式の調和関数との密接な関係が明らかになってきた. ここでは, [8] に従って, potential V に対して次の仮定をおく: ある $\omega > 0$, $\theta > 0$ が存在して

$$(\mathbf{V}) \qquad \begin{cases} \text{(i)} & V = V(|x|) \in C^1(\mathbf{R}^N), \\ \text{(ii)} & V(r) \geq 0, \quad V \not\equiv 0 \quad \text{on} \quad [0,\infty), \\ \text{(iii)} & \displaystyle\sup_{r\geq 1} r^{2+\theta}\left|V(r) - \frac{\omega}{r^2}\right| < \infty, \\ \text{(iv)} & \displaystyle\sup_{r\geq 1}\left| r^3\left(\frac{d}{dr}V\right)(r)\right| < \infty. \end{cases}$$

このとき, 条件 (V) の下で, $k = 0, 1, 2\ldots$ に対して, 常微分方程式

$$\begin{cases} U'' + \dfrac{N-1}{r}U' - \left(V(r) + \dfrac{\omega_k}{r^2}\right)U = 0 & \text{in} \quad (0,\infty), \\ \displaystyle\limsup_{r\to\infty} U(r) < \infty, \quad \lim_{r\to\infty} r^{\alpha(\omega+\omega_k)}U(r) = 1 \end{cases}$$

を考える．ただし，任意の $\mu \geq 0$ に対して，$\alpha(\mu)$ を2次方程式 $\alpha(\alpha+N-2)=\mu$ の正値根，つまり，

$$\alpha(\mu)=\frac{-(N-2)+\sqrt{(N-2)^2+4\mu}}{2}>0$$

とする．このとき，上をみたす一意解が存在し，それを U_k と書くことにする．ここで，

$$U_{k,i}(x)=U_k(|x|)Q_{k,i}\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

は $\Delta U_{k,i}-V(|x|)U_{k,i}=0$ をみたすので，(5.1) の解 u に対して

$$\int_{\mathbf{R}^N} u(x,t)U_{k,i}(x)dx=\int_{\mathbf{R}^N}\phi(x)U_{k,i}(x)dx, \qquad t\geq 0$$

が成立し，無限個の保存量を得ることができる．これら多数の調和関数 $U_{k,i}$ の中で，解の最大点挙動と密接な関係があるのは，$k=0,1$ に対応するものである．まず，解の極限についての結果を与える．

Theorem 5.1 ([8] を参照)
条件 (V) の下で，(5.1) の解 u を考える．また，$\omega>0$ とし

$$M\equiv\int_{\mathbf{R}^N}\phi(x)U_0(|x|)\,dx>0.$$

を仮定する．このとき，任意の $L>0$ に対して，

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\in B(0,L)}\left|t^{\frac{N}{2}+\alpha(\omega)}u(x,t)-cMU_0(|x|)\right|=0, \tag{5.2}$$

が成立する．ただし，$c=1/\int_{\mathbf{R}^N}|x|^{2\alpha(\omega)}e^{-|x|^2/4}dx$．さらに，任意の $t>0$ に対して $H(t)\neq\emptyset$ であり，

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\in H(t)}\left|t^{-1}|x|-\sqrt{2\alpha(\omega)}\right|=0.$$

が成立する．

Theorem 5.2 ([8] を参照)
Theorem 5.1 と同じ条件の下，さらに

$$A_\phi\equiv\int_{\mathbf{R}^N}\phi(x)U_1(|x|)\frac{x}{|x|}dx\neq 0$$

を仮定する．このとき，ある正定数 T とある曲線 $x = x(t) \in C^1([T,\infty) : \mathbf{R}^N)$ が存在し，

$$H(t) = \{x(t)\}, \quad t \geq T, \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{|x(t)|} = \frac{A_\phi}{|A_\phi|}.$$

が成立する．

これらの結果より，調和関数 U_0, $U_{1,i}$ $(i = 1, \ldots, N)$ が $H(t)$ の大域的挙動に強い影響を与えていることがわかる．

この節では，$\omega > 0$ の場合を扱ってきたが，現在まとめている論文 [9] のよると，$\omega = 0$ の場合はより複雑で $H(t)$ の無限遠点への発散の速さは様々であり，ある積分量を介在して変化するが，$N \geq 3$ の場合，発散の速さは $t^{1/N}$ 以上 $t^{1/2}$ 未満であることがわかり，$N = 2$ の場合は $t^{1/2}(\log t)^{-1/2}$ の速さで発散することがわかる．また，幾つかの付加条件を加えれば，Theorem 5.2 と同様のことがわかる．いずれにしても，解の漸近挙動及び $\omega = 0$ における $H(t)$ の発散速度には U_0, $H(t)$ の発散する方向と個数には $U_{1,i}$ $(i = 1, \ldots, N)$ が影響して決定されることがわかる．

また，これらの証明には，第 4 節で説明した議論の方針に沿って行うことが可能である．ただし，変数変換後に現れる $s = \infty$ における V から派生する特異性に加えて，$r = 0$ における特異性も現れるため，より詳しい解析手法が必要となるが，U_k を用いた優解を構成し，さらには近似解を構成することによって可能となる．

6 解の微分の減衰の速さについて

解の最大点挙動の解析手法の応用・発展として，解の微分係数の減衰の速さについて議論する．また，境界条件との関係も見るために，第 3 種境界条件の下，方程式 (5.1) を扱うことにする．つまり，

$$\text{(6.1)} \qquad \begin{cases} \partial_t u = \Delta u - V(|x|)u & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ \mu u + (1-\mu)\partial_\nu u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{in} \quad \Omega \end{cases}$$

の解 u を考えることにする．ただし，$\Omega = \{|x| > 1\}$, $0 \leq \mu \leq 1$, $\phi \in L^p(\mathbf{R}^N)$ $(1 \leq p < \infty)$ とする．また，potential V には，解の高階微分を考察するために第 4 節で与えた条件を少し変更し，次の条件を仮定する: ある $\omega \geq 0$, $\theta > 0$,

$m = 1, 2, \ldots$ が存在し,

$$(\mathbf{V}') \qquad \begin{cases} \text{(i)} & V = V(|x|) \in C^m(\mathbf{R}^N), \\ \text{(ii)} & V(r) \geq 0, \quad V \not\equiv 0 \quad \text{on} \quad [0, \infty), \\ \text{(iii)} & \sup_{r \geq 1} r^{2+\theta} \left| V(r) - \dfrac{\omega}{r^2} \right| < \infty, \\ \text{(iv)} & \sup_{r \geq 1} \left| r^{j+2} \left(\dfrac{d^j}{dr^j} V \right)(r) \right| < \infty, \quad j = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

この条件 (V') の下で, $\mathbf{R}^N$ 上の熱方程式の解 $e^{t\Delta}\phi$ に対する良く知られた次の評価式: 「任意の $l = 1, 2, \ldots, p \geq 1$ に対して, ある定数 C が存在して

$$(6.2) \qquad \|\nabla_x^l e^{t\Delta}\phi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \leq {}^\exists C t^{-\frac{N}{2p} - \frac{l}{2}} \|\phi\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}, \quad t > 0$$

が成立する」
が問題 (6.1) に対して成立するのか, というこの節で扱う問題である. t が十分小さい時には成立することが既に知られているので, t が十分大きい場合が問題となる. ここでは, 上記不等式が成立するのかどうか?, 成立しないならば, 最適な解の微分の減衰の速さは何か, という問題を考察した結果について紹介する.

ここでも, 第5節で現れた調和関数 $U_0(|x|)$ の挙動, 特に $r = \infty$ での増大度が重要である. まず, 一般的な場合の結果を与える.

Theorem 6.1 ([7] を参照)
条件 (V) の下で, (6.1) の解 u を考える.

$$(6.3) \qquad V(r) \equiv \frac{\omega_n}{r^2} \quad on \quad [1, \infty), \qquad \mu = \frac{n}{n+1}, \qquad n = 2n'$$

をみたす $n' = \mathbf{N} \cup \{0\}$ が存在しないと仮定する. このとき, $l = 1, \ldots, m+1$, $1 \leq p < \infty$ に対して, ある定数 C が存在して, $l \leq \alpha(\omega)$ ならば,

$$\|(\nabla_x^l u)(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C t^{-\frac{N}{2p} - \frac{l}{2}} \|\phi\|_{L^p(\Omega)}, \quad t \geq 1,$$

$l > \alpha(\omega)$ ならば

$$\|(\nabla_x^l u)(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C t^{-\frac{N}{2p} - \frac{\alpha(\omega)}{2}} \|\phi\|_{L^p(\Omega)}, \quad t \geq 1,$$

が成立する. ここで, 定数 C は初期値 ϕ に依存しない.

この定理で与えている解の微分の減衰の速さは最適な評価であることも示すことができる. 次に, Thoeorem 6.1 において扱われいない場合, つまり (6.3) が成立している場合について考える.

Theorem 6.2 ([7] を参照)
条件 (V') の下で, (6.1) の解 u を考える. また, (6.3) をみたす $n' = \mathbf{N} \cup \{0\}$ が存在すると仮定する. このとき, 任意の $l = 1, 2, \ldots, 1 \le p < \infty$ に対して, ある定数 C が存在して, $l \le \alpha(\omega) = \alpha(\omega_n) = n$ ならば,

$$\|(\nabla_x^l u)(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le Ct^{-\frac{N}{2p}-\frac{l}{2}}\|\phi\|_{L^p(\Omega)}, \quad t \ge 1,$$

$l > \alpha(\omega) = n$ ならば

$$\|(\nabla_x^l u)(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le Ct^{-\frac{N}{2p}-\frac{\alpha(\omega+\omega_1)}{2}}\|\phi\|_{L^p(\Omega)}, \quad t \ge 1,$$

が成立する. ここで, 定数 C は初期値 ϕ に依存しない.

この定理で与えている解の微分の減衰の速さについても最適な評価であることも示すことができる. また, 条件 (6.3) の下では,

$$U_0(r) = r^n = r^{2n'}, \quad r \ge 1$$

となっており, $\nabla_x^{2n'} U_0(|x|) \equiv 0$ という例外的な関係式が成立している. また, $\alpha(\omega_k) = k$ に注意すると, これら二つの定理により, 条件 (V') の下, 不等式 (6.2) が $l = 1$ に対して成立する必要十分条件は

$$\omega \ge \omega_1 = N - 1 \qquad \text{または} \qquad V \equiv 0 \quad \text{on} \quad [0, \infty), \quad \mu = 0$$

となる.

この解の微分の減衰は, 初期値 $\phi \in L^2(\Omega)$ に対して, 期待できる $t \to \infty$ に対する解の減衰の速さは k に無関係に $t^{-N/2}$ であることと (4.2) から導き出される. 特に, $k = 0$ の場合が重要であるが, Theorem 6.2 で扱っている場合は, $\nabla_x^{2n'} U_0(|x|) \equiv 0$ となってしまうため, $l \ge m$ に対しては $k = 1$ の場合が重要となり, $\alpha(\omega)$ に代わって $\alpha(\omega + \omega_1)$ が解の減衰の速さにとって重要な指数となり, これが Theorem 6.2 において $\alpha(\omega + \omega_1)$ が現れる理由である.

これらの研究は, 非有界領域における時間無限大における線形熱方程式の解の形状は調和関数によって多くの情報が与えられるという一例であり, 今後, さらに多くのことが調和関数を介在して理解できるものと期待する次第である. さらに, 半線形拡散方程式などの非線形方程式への応用はこれからであり, 今後の発展が多いに期待されるものと考えている.

References

[1] R. Bañuelos and K. Burdzy, On the "Hot Spot Conjecture" of J. Rauch, Jour. Func. Anal., 164 (1999), 1-33.

[2] K. Burdzy and W. Werner, A counterexample to the "hot spots" conjecture, Ann. of Math., (1999), 309-317.

[3] I. Chavel and L. Karp, Movement of hot spots in Riemannian manifolds, J. Analyse Math., 55 (1990), 271-286.

[4] M. Escobedo and O. Kavian, Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation, Nonlinear Anal. T. M. A., 11 (1987), 1103-1133.

[5] K. Ishige, Movement of hot spots on the exterior domain of a ball under the Neumann boundary condition, J. Diff. Eqns., 212 (2005), 394-431.

[6] K. Ishige, Movement of hot spots on the exterior domain of a ball under the Dirichlet boundary condition, preprint.

[7] K. Ishige and Y. Kabeya, Decay rates of the derivatives of the solutions of the heat equations in the exterior domain of a ball, preprint.

[8] K. Ishige and Y. Kabeya, Large time behaviors of hot spots for the heat equation with a potential, preprint.

[9] K. Ishige and Y. Kabeya, Large time behaviors of hot spots for the heat equation with a potential II in preparation.

[10] D. Jerison and N. Nadirashvili, The "hot spots" conjecture for domains with two axes of symmetry, J. Amer. Math. Soc., 13 (2000), 741-772.

[11] S. Jimbo and S. Sakaguchi, Movement of hot spots over unbounded domains in $\mathbf{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. 182 (1994), 810-835.

[12] B. Kawohl, Rearrangements and Convexity of Level Sets in PDE, Springer Lecture Notes in Math. 1150 (1985).

[13] J. Rauch, Five problems: An introduction to the qualitative theory of partial differential equations, in Partial Differential Equations and Related Topics, Springer Lecture Notes in Math. 446 (1975).